

**Н.М. Бреус, С.В. Грибков, Г.Є. Поліщук, О.Л. Сєдих**

Національний університет харчових технологій,  
вул. Володимирська, 68, Київ, 01601, Україна,  
+380 44 287 9247, +380 66 294 1304, sergio\_nuft@nuft.edu.ua

## РОЗРОБЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЦЕПТУР МОРОЗИВА ІЗ ЗАДАНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ЯКОСТІ



**Вступ.** Застосування нових методів, зокрема експертних систем з математичним апаратом, дозволяє удосконалити рецептурний склад багатокомпонентних харчових продуктів в широкому діапазоні вмісту складових компонентів з їх повною або частковою заміною на інші, зокрема й на натуральні функціонально-технологічні інгредієнти.

**Проблематика.** Створення та використання гібридної експертної системи моделювання рецептур морозива не можливо здійснити без застосування особливого математичним апарату.

**Мета.** Розробка математичних моделей та методів, які дозволяють оперативно розраховувати багатокомпонентні рецептури морозива з нормативним хімічним складом з урахуванням наявної на підприємстві сировини й функціонально-технологічних інгредієнтів та одержувати готовий продукт гарантованої якості.

**Матеріали й методи.** Використано метод аналізу й синтезу, узагальнення та наукової абстракції, а також метод математичного моделювання. Інформаційною базою дослідження слугували результати лабораторних досліджень якості рецептурних компонентів та морозива різного хімічного складу. Математичне моделювання з використанням кортежів, систем рівнянь та обмежень детально здійснено у програмних пакетах *MathCad* та *MathLab*.

**Результати.** В ході розробки математичного апарату експертної системи було одержано теоретико-множинну математичну модель управління якістю готового продукту на етапі оперативного планування рецептури нових видів морозива підвищеної харчової цінності, оптимізовано за складом багатокомпонентні рецептури морозива, сформовано модель визначення оптимального набору керуючих впливів за наявності технологічних дефектів під час розрахунку рецептур.

**Висновки.** Створений математичний апарат для моделювання рецептур морозива є універсальним завдяки взаємозамінності окремих функціонально-технологічних компонентів, що перевірено та підтверджено під час його апробації у науково-дослідних лабораторіях.

*Ключові слова:* математичний апарат, експертна система, оптимізація, моделювання рецептур морозива.

Стратегічний розвиток харчових технологій залежить від ефективності наукових досліджень та впровадження їх результатів у виробництво. Під час виконання науково-дослідних робіт необхідно визначати внесок окремих розробок у вирішення поставлених завдань, а також оцінювати перспективність отриманих

результатів та розробляти стратегію їх впровадження.

Складність і глибина зазначених проблем вимагає залучення до виконання науково-дослідних робіт прикладного характеру фахівців-експертів вищої кваліфікації. У зв'язку з цим, для вирішення актуальних завдань харчової промисловості, що супроводжуються системним управлінням окремими серіями наукових досліджень, необхідно застосовувати сучасні

інформаційні технології, зокрема й на основі експертних систем. Такі системи є найбільш ефективним інструментом для проведення наукових досліджень з подальшим впровадженням їх результатів у виробництво. За допомогою експертних систем можна інтегрувати знання вчених різних спеціальностей, створювати відповідні партнерські системи, які будуть формувати рекомендації промисловості.

Нині існує певна проблема під час створення інформаційних систем для вирішення конкретних завдань харчових технологій як складних багатофакторних моделей. На кінцевий результат впливають як фізико-хімічні показники рецептурних інгредієнтів та їх вміст у складі багатокомпонентних харчових систем, так і одночасний вплив на ці системи низки параметрів обробки (механічної, теплової, біохімічної та ін.) впродовж усього технологічного циклу виробництва.

Для побудови відповідної інформаційної системи з метою підтримки технологічних процесів за допомогою експертних знань, необхідно є низка складових — технічний, інформаційний та універсальний математичний апарати, що представлені комплексом математичних методів і моделей. Подібний математичний апарат може бути застосовано до вирішення завдань з моделювання та оптимізації складу різних видів багатокомпонентних харчових систем в широкому діапазоні зміни рецептурного складу із застосуванням принципово нових функціонально-технологічних інгредієнтів.

Проблеми комп'ютерного моделювання продуктів харчування із заданою харчовою цінністю досліджували різні вчені, зокрема Ліпатов Н.Н. та Ювашкіна Ю.А. у роботах [1, 2]. Питанням оптимізації окремих технологічних операцій присвячено праці відомих вітчизняних та зарубіжних вчених: Поліщук Г.Є., Оленева Ю.А., Творогової А.А., Краснова А.Е., Красулі О.Н., Marshall R.T., Goff H.D., Hartel R.W. [1–12].

Проблеми підтримки технологічних процесів харчової галузі шляхом використання ін-

формаційних технологій розглядаються дуже широко, але не існує аналогів інформаційних систем з універсальним математичним апаратом, призначених для моделювання рецептур морозива як найскладнішого за хімічним складом та фізичними характеристиками харчового продукту.

Дослідження в галузі моделювання складу морозива показали, що розробка рецептур у більшості випадків розглядається лише як завдання розробки нового продукту з оригінальними споживчими властивостями. Такі питання, як правило, вирішуються без використання інформаційних технологій, що включають в себе математичні методи та моделі, і не враховують всю специфіку моделювання рецептур нових видів морозива з урахуванням підвищення якості продукту.

Водночас, для підвищення харчової цінності продуктів шляхом розробки нових рецептур, суттєвого значення слід надавати моделюванню споживчих характеристик готових виробів та прогнозуванню їх функціонально-технологічних характеристик, які, власне, й формуються на стадії складання рецептурних сумішей.

Під час моделювання складу морозива слід враховувати те, що поняття «якість» є комплексом спеціальних вимог до взаємопов'язаних органолептичних та фізико-хімічних показників. Основними показниками, що формують органолептичне сприйняття консистенції готового продукту, є: об'ємний вміст повітря (збитість), ступінь дисперсності повітряної фази та опір таненню [4–9].

Варто зазначити, що натурний процес моделювання багатокомпонентних рецептур морозива вимагає суттєвих витрат часу й матеріалів на лабораторні дослідження у разі заміни кожного рецептурного компонента та вибору його раціонального вмісту.

Метою роботи була розробка математичних моделей та методів, які дозволяють оперативно розраховувати багатокомпонентні рецептури морозива з нормативним хімічним складом

з урахуванням наявної на підприємстві сировини та функціонально-технологічних інгредієнтів для виробництва готового продукту гарантованої якості.

Створений математичний апарат експертної системи повинен забезпечити підтримку створення рецептур нових видів морозива із заданими споживчими характеристиками й оптимальною собівартістю, а також здійснювати підбір оптимального хімічного складу сумішей для формування заданих органолептичних та фізико-хімічних показників морозива за рахунок функціонально-технологічних властивостей рецептурних компонентів.

Теоретико-множинна математична модель управління якістю готового продукту на етапі оперативного планування рецептури нових видів морозива підвищеної харчової цінності має логічно-послідовний вигляд [11, 13].

В момент часу  $T$  задано множину сировини у вигляді  $X(T)$  – множини кортежів  $X(T, i)$ :

$$X(T, i) = \langle X(T, i, 1), X(T, i, 2), \dots, X(T, i, K + 1) \rangle, \quad (1)$$

де  $X(T, i, 1)$  – кількість  $i$ -ї сировини на складі в момент  $T$ ;  $X(T, i, 2), X(T, i, K)$  – показники якості  $i$ -ї сировини на складі в момент  $T$ ;  $K$  – кількість показників якості.

Повинні виконуватися наступні рівності:

$$\begin{aligned} X(0) &= \emptyset, \\ X(0) &= \bigcup_{i=1}^N X(T, i) \\ X(T) &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Також, в момент часу  $T$  задано множину допоміжних матеріалів у вигляді  $Xdpm(T)$  описується кортежами  $Xdpm(T, i)$ :

$$Xdpm(T, i) = \langle Xdpm(T, i, 1), Xdpm(T, i, 2), \dots, Xdpm(T, i, Kv + 1) \rangle, \quad (3)$$

де  $Xdpm(T, i, 1)$  – кількість допоміжних матеріалів  $i$ -го виду на складі в момент  $T$ ;  $X(T, i, 2), \dots, X(T, i, Kv+1)$  – показники якості  $i$ -го виду допоміжного матеріалу на складі в момент  $T$ ;  $Kv$  – кількість показників якості  $i$ -го виду допоміжного матеріалу.

При цьому повинні виконуватися рівності:

$$\begin{aligned} Xdpm(0) &= \emptyset, \\ Xdpm(T) &= \bigcup_{i=1}^N Xdpm(T, i), \\ Xdpm(T) &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В момент часу  $T$  є планове завдання на виготовлення морозива, описане наступним чином:

$$Pz(T) = \langle Pz(T, 1), Pzmax(T, 2), Pzmax(T, L), Pzmin(T, 2), Pzmin(T, Np) \rangle, \quad (5)$$

де  $Pz(T, 1)$  – обсяги запланованого виробництва морозива у кількісному вираженні;  $Pzmax(T, 2), Pzmax(T, L)$  – максимально допустимі показники якості морозива;  $Pzmin(T, 2), Pzmin(T, L)$  – мінімально допустимі показники якості морозива;  $Np$  – кількість показників якості готового продукту.

Задача зводиться до синтезу оператором  $U$  при заданому інтервалі  $dT$ , що формує кортеж  $R(T+dT)$ , який описується виразом:

$$R(T+dT) = U(X(T), Pz(T), NRec(T)), \quad (6)$$

де  $R(T + dT) = \langle Xp(T + dT), Xpdpm(T + dT), Fp(T + dT) \rangle$ ;  $Xp(T + dT)$  – множина сировини, що запланована до використання в інтервалі  $(T, T + dT)$  на виробництво продукції;  $Xpdpm(T + dT)$  – множина допоміжних матеріалів, що заплановані до використання в інтервалі  $\langle T, T + dT \rangle$  на виробництво продукції;  $Fp(T + dT)$  – кортеж продукції, що планується до виробництва в інтервалі  $\langle T, T + dT \rangle$ ,  $Fp(T + dT) = \langle Fp(T + dT, 1), Fp(T + dT, 2), \dots, Fp(T + dT, Np) \rangle$ ;  $Fp(T + dT, 1)$  – обсяг запланованої до виробництва продукції;  $Fp(T + dT, 2), \dots, Fp(T + dT, Np)$  – показники якості майбутньої продукції;  $NRec(T)$  – нова рецептура, вироблена в момент часу  $T$ .

Нехай  $Ff(T + dT)$  – це кортеж фактично виробленої продукції в інтервалі  $\langle T, T+dT \rangle$ , тоді  $Ff(T + dT) = \langle Ff(T + dT, 1), Ff(T + dT, 2), \dots, Ff(T + dT, Np) \rangle$ ;  $Ff(T + dT, 1)$  – кількість виробленої продукції в інтервалі  $\langle T, T + dT \rangle$ , а  $Ff(T + dT, 2), \dots, Ff(T + dT, Np)$  – показники якості виробленої продукції.

Допустимий оператор  $Ud$  забезпечує виконання співвідношень:

$$\forall k(Pzmin(T + dT, k) \leq Fp(T + dT, k) \leq Pzmax(T + dT, k)), k = 2, \dots, Np, \quad (7)$$

$$\forall k(Pzmin(T + dT, k) \leq Ff(T + dT, k) \leq Pzmax(T + dT, k)), k = 2, \dots, Np. \quad (8)$$

Ці співвідношення забезпечують отримання продукції заданої якості.

Якщо  $Xn(T + dT)$  — це множина сировини, що надійшла на склад в інтервалі часу  $\langle T, T + dT \rangle$ , то множина сировини в момент  $T + dT$  визначиться співвідношенням:

$$X(T + dT) = X(T) \cup Xn(T + dT) \setminus Xp(T + dT). \quad (9)$$

Для допоміжних видів матеріалів співвідношення буде таким:

$$Xdpm(T + dT) = Xdpm(T) \cup Xdpmn(T + dT) \setminus Xdmp(T + dT), \quad (10)$$

де  $Xdpm(T + dT)$  — множина допоміжних матеріалів на складі в момент  $T + dT$ ;  $Xdpm(T)$  — множина допоміжних матеріалів на складі в момент  $T$ ;  $Xdpmn(T + dT)$  — множина допоміжних матеріалів, що надійшли на склад в інтервалі  $T, T + dT$ ;  $Xdmp(T + dT)$  — множина допоміжних матеріалів, що плануються до використання в інтервалі  $T, T + dT$ .

Нехай оптимальний оператор  $U_0$  — допустимий оператор  $U_p$ , що забезпечує оптимальне значення заданого критерію ефективності  $Q$ , та визначається як вартість рецептурного складу морозива. Оскільки технологія виробництва морозива є багатоетапним та складним процесом, оператор  $U$  представимо набором операторів:

$$U = \bigcup_{i=1}^4 U_i, \quad (11)$$

де  $U_i$  — оператор, який формує  $Xp$  — множину сировини для переробки.

Відповідно до планового завдання обирається підмножина  $Xp(T)$  для переробки:

$$Xp(T) = U_1(X(T), Pz(T)). \quad (12)$$

На основі обраної підмножини  $Xp(T)$  оператором  $U_2$  формується множина інгредієнтів для формування рецептур морозива:

$$\begin{aligned} \langle Y(T), Xdmp(T) \rangle &= U_2(Xp(T), Pz(T)), \\ Y(T) &= \{y(T, i)\} \quad i = 1, \dots, |Y(T)|, \quad (13) \\ y(T, i) &= \langle y(T, i, 1), y(T, i, 2), \dots, y(T, i, M) \rangle, \end{aligned}$$

де  $y(T, i, 1)$  — кількість  $i$ -го об'єкта;  $y(T, i, 2), \dots, y(T, i, M)$  — показники якості  $i$ -го об'єкта;  $M$  — кількість показників якості  $i$ -го об'єкта;  $Xdmp(T)$  — множина допоміжних матеріалів, що використовують в інтервалі  $T, T + dT$  при формуванні рецептурного складу.

Базуючись на множині  $Y(T)$ , оператор  $U_3$  формує хімічний склад рецептури морозива  $Z(T)$ , який можна описати виразом:

$$\begin{aligned} Z(T) &= U_3(Y(T), Pz(T), R), \\ Z(T) &= \langle Z(T, 1), Z(T, 2), \dots, Z(T, Nf) \rangle, \quad (14) \end{aligned}$$

де  $Z(T, 1)$  — планова кількість морозива;  $Z(T, 2), \dots, Z(T, Nf)$  — показники якості морозива;  $Nf$  — кількість показників якості.

Морозиво  $Z(T)$  оператором  $U_4$  перетворюється в нову планову готову продукцію  $Fp(T + dT)$ , що описана виразом:

$$Fp(T + dT) = U_4(Z(T), Pz(T)). \quad (15)$$

Кортеж фактично виробленої продукції  $Fp(T + dT)$  не обраховується, а формується відповідно до звітної документації підприємства.

Завдання оптимізації рецептури морозива полягає у визначенні інгредієнтного складу рецептури із застосуванням різних видів сировини, які мають певні фізико-хімічні характеристики та високу харчову цінність [4–7].

Для постановки задачі оптимізації багатокомпонентних рецептур морозива необхідно мати повну інформацію про перелік усіх видів інгредієнтів, які можуть увійти до складу рецептур, показники якості та функціонально-технологічні властивості кожного виду сировини, а також про кількісний вміст інгредієнтів.

Більшість рецептурних компонентів у складі морозива на молочній основі є базовими, а їх вміст контролюють відповідно до вимог

нормативних документів. Наприклад, у складі морозива обов'язково регламентованим є вміст низки рецептурних компонентів: цукру та цукристих речовин; жиру; стабілізатора; вологи; сухого знежиреного молочного залишку. Смако-ароматичні речовини, наповнювачі та інші компоненти додають до сумішей морозива відповідно до рекомендацій виробників для формування заданих органолептичних показників конкретного виду продукту.

Нехай задано множину інгредієнтів, що описана кортежами  $Y$ :

$$Y(i) = \langle y(i, k) \rangle, i = 1, N; k = 1, K, \quad (16)$$

де  $y(i, 1)$  – мінімально допустима частка  $i$ -го інгредієнта в рецептурі;  $y(i, 2)$  – максимально допустима частка  $i$ -го інгредієнта в рецептурі;  $y(i, 3)$  – вміст вологи в  $i$ -му інгредієнті, %;  $y(i, 4)$  – вміст жиру в  $i$ -му інгредієнті, %;  $y(i, 5)$  – вміст цукру та цукристих речовин в  $i$ -му інгредієнті, %;  $y(i, 6)$  – вміст стабілізатора структури в  $i$ -му інгредієнті, %;  $y(i, 7)$  – вміст сухого знежиреного молочного залишку (СЗМЗ) в  $i$ -му інгредієнті, %;  $y(i, 8)$  – ціна 1 кг  $i$ -го інгредієнта, грн.

Вимогами до показників якості кінцевого продукту є:

- $K_v$  (вологи), % –  $60 \leq K_v \leq 72$ ;
- $K_s$  (СЗМЗ), % –  $8 \leq K_s \leq 12$ ;
- $K_j$  (жиру), % –  $0,5 \leq K_j \leq 5$ ;
- $K_{st}$  (стабілізатору структури не більше), % –  $0,4 \leq K_{st} \leq 1,5$ ;
- $K_z$  (цукру та цукристих речовин не більше), % –  $14 \leq K_z \leq 18$ .

Наприклад, для рецептури морозива вершкового класичного значення вищенаведених коефіцієнтів будуть такими:

$$K_v = 65 \%, K_s = 10 \%, K_j = 15 \%, \\ K_{st} = 0,5 \%, K_z = 14,5 \%$$

При зазначених вихідних даних потрібно визначити наступний вектор:

$$x = \langle x(i) \rangle, i = 1, N, \quad (17)$$

де  $x(i)$  – масова частка  $i$ -го інгредієнта в рецептурі.

Допустиме рішення є вектор  $x$ , що задовольняє нижчезазначеним обмеженням:

- обмеження за вмістом вологи:

$$\sum_{i=1}^N x(i) \cdot y(i, 3) \leq K_v k; \quad (18)$$

- обмеження за вмістом жиру:

$$\sum_{i=1}^N x(i) \cdot y(i, 4) \leq K_j k; \quad (19)$$

- обмеження за вмістом цукру:

$$\sum_{i=1}^N x(i) \cdot y(i, 5) \leq K_z k; \quad (20)$$

- обмеження за вмістом стабілізатора:

$$\sum_{i=1}^N x(i) \cdot y(i, 6) \leq K_{st} k; \quad (21)$$

- обмеження за вмістом СЗМЗ:

$$\sum_{i=1}^N x(i) \cdot y(i, 7) \leq K_s k; \quad (22)$$

- сума часток повинна дорівнювати одиниці (частки визначаються для одиничного продукту):

$$\sum_{i=1}^N x(i) = 1; \quad (23)$$

- обмеження на використання інгредієнтів:

$$\forall i (y(i, 1) \leq x(i) \leq y(i, 2)), i = 1, N. \quad (24)$$

Функція оптимізації поставленого завдання буде мати вигляд:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N x(i) \cdot y(i, 8) \rightarrow \min. \quad (25)$$

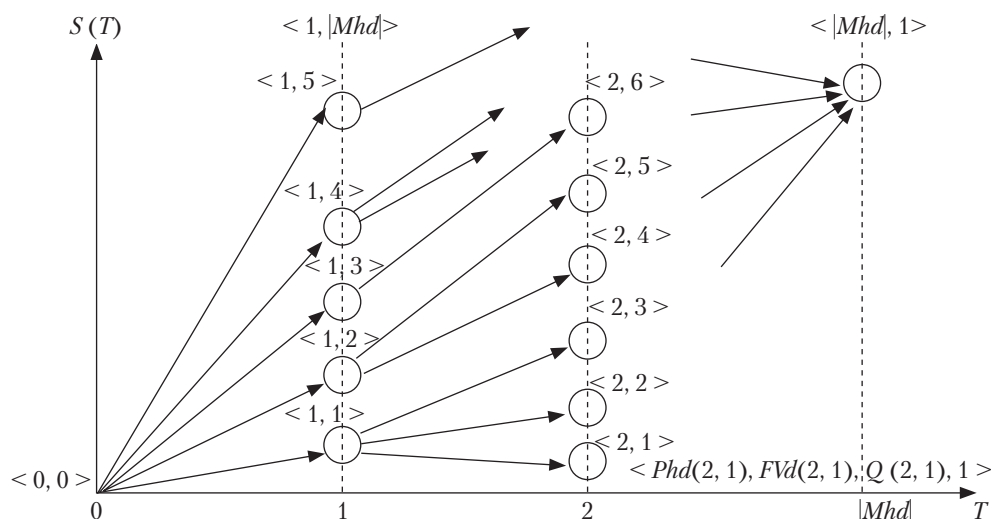
Відповідно до вищевикладеної технології формування нових видів рецептур, існує можливість замінювати окремі інгредієнти рецептури іншими інгредієнтами, що відповідають всім необхідним вимогам.

Замінник або новий інгредієнт можна виразити рівнянням:

$$Y_z = \langle y_z(k) \rangle, k = 1, K,$$

де  $y_z(1)$  – мінімально допустима частка замітника в рецептурі;  $y_z(2)$  – максимально допустима частка замітника в рецептурі;  $y_z(3)$  – вміст вологи в замірнику, %;  $y_z(4)$  – вміст жиру в замірнику, %;  $y_z(5)$  – вміст цукру в замірни-





**Рис.** Покрокова побудова рішення сформульованої задачі: де  $nom(T-1)$  – номер точки попереднього кроку, з якої отримана точка на кроці  $T$ . Процес починається з точки  $\langle 0, 0 \rangle$ ,  $Phd(0) = \emptyset$ ,  $FVh(0) \langle 0, \dots, 0 \rangle$ ,  $Q(0) = 0$ . На першому кроці отримуємо  $|Mpd|$  варіантів формування множини  $Phd$ , кожен з яких складається з одного об'єкта множини  $Mhd$ :  $Phd(1, 1), Phd(1, 1), \dots, Phd(1, |Mhd|)$ . На другому кроці отримуємо  $C^2_{|Mhd|}$  варіантів, на третьому –  $C^3_{|Mhd|}$  варіантів, на останньому –  $C^{|Mhd|}_{|Mhd|}$ . Така побудова являє собою прямий перебір варіантів рішення задачі.

ку, %;  $yz(6)$  – вміст стабілізатора структури в замінику, %;  $yz(7)$  – вміст сухого знежиреного молочного залишку (СЗМЗ) в замінику, %;  $yz(8)$  – ціна 1 кг заміника, грн.;  $S$  – множина номерів інгредієнтів.

Таким чином, якщо  $kz \in S$ , то при його заміні інгредієнтом  $yz$  в постановці задачі потрібно внести відповідні зміни:

- включити в множину інгредієнтів заміник  $yz$  під номером  $N + 1$ ;
- в формулах (18–23) замінити  $N$  на  $N + 1$ ;
- формула (24) для номера  $kst$  набуває вигляду:

$$\forall (kst, 1) \leq x(kst) + x(N + 1) \leq y(kst, 2); \quad (26)$$

- для інших номерів формула (24) залишається незмінною.

Для вирішення задачі оптимізації рецептур морозива було використано симплекс-метод, де цільовою функцією є мінімізація ціни на продукт, а обмеженням є вимоги до якості морозива.

Так, при виявленні технологічних дефектів в рецептурах морозива (наприклад, в рецептурі високий відсоток вмісту дисперсної фази, що призводить до нестійкої структури, а смак

і запах не відповідають вимогам), необхідно скорегувати набір функціонально технологічних і смако-ароматичних властивостей, якими володіє продукт за зазначеною рецептурою. Цей набір властивостей формується та корегується за рахунок керуючих впливів, що визначаються внесенням до складу рецептур харчових добавок з необхідними функціонально-технологічними властивостями [13, 14].

В результаті постає завдання щодо вибору такого переліку керуючих впливів у вигляді харчових добавок, який би в сумі містив необхідний набір інгредієнтів, але при цьому сумарна вартість одиниці маси цих добавок була б мінімальною.

Множина харчових добавок  $Mhd$ , кожен елемент якої  $Mhd(i)$  задано у вигляді кортежу:

$$Mhd(i) = \langle Mhd(i, k), Mhd(i, K+1) \rangle, \quad (27)$$

де  $Mhd(i, k) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Mhd(i) \text{ володіє } k\text{-ою} \\ & \text{функціональною властивістю,} \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$

$k = 1, \dots, K$ , де  $K$  – кількість функціональних властивостей;  $Mhd(i, K + 1)$  – ціна  $i$ -ої добавки.

Нехай задано набір функціональних властивостей у вигляді вектора:

$$FV = \langle FV(1) \rangle, I = 1, \dots, L, L \leq K, \quad (28)$$

де  $FV = \begin{cases} 1, \text{ якщо потрібна наявність функціональної властивості } l \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$

Нехай  $Phd$  — підмножина  $Mhd$ :  $Phd \subseteq Mhd$ . Визначимо оператор  $Fh$ , що формує вектор  $FVh$ :

$$FVh = Fh(Phd), \\ FVh(1) = 0 \dots 1 = 1, \dots, L, \quad (29)$$

$$FVh(l) = FVh(l) \vee Phd(i, 1) \quad l = 1, \dots, L, i = 1, \dots, |Phd|.$$

Таким чином, вектор  $FVh$  узагальнює набір функціональних властивостей, що відповідають підмножині  $Phd$ . Потрібно визначити таку підмножину  $Phd$ , за якої виконуються нижченаведені умови:

$$Fh(Phd) = FV, \quad (30)$$

$$\text{і критерій } Q = \sum_{i=1}^{|Phd|} Phd(i, K+1) \rightarrow \min. \quad (31)$$

Сформульоване завдання належить до задач знаходження найменшого вершинного покриття  $NP$ -складної задачі оптимізації цілочисельного програмування й удосконалена правилами відкидання неперспективних варіантів [15–17]. На рис. 1 наведено покрокову побудову рішень цієї задачі. На площині  $\langle S, T \rangle$ , де  $T = 0, \dots, |Mhd|$ ,  $S(T)$  — це множина точок, кожній з яких відповідає трійка значень:  $\langle Phd(T), FVh(T), Q(T), nom(T-1) \rangle$ , що описує варіанти побудови рішення на кроці  $T$ .

Зіставимо у кожній точці площини  $\langle S, T \rangle$  вершину деякого графа, а отримання одного варіанта рішення на кожному кроці побудови рішення представимо дугою графа. Отриманий граф є графом допустимих станів (ГДС). Для зменшення розмірності задачі потрібно на кожному кроці відсіювати недопустимі та неперспективні варіанти рішень.

Розглянемо процес отримання нової точки  $S(T+1, n)$  із точки  $S(T, j)$ .

Нехай  $Mhd(n) \notin Mhd \setminus Phd(T, j)$ , що створює підмножини:

$$Phd(T+1, n) = Phd(T, j) \cup Mhd(n), \quad (32)$$

$$FVh(T+1, n) = Fh(Phd(T+1, n)). \quad (33)$$

Якщо

$$FVh(T+1, n) = \\ = FVh(T, j) \vee \exists 1(FVh(T+1, n, 1) > FV(1)), \quad (34)$$

то додавання нової добавки або не збільшило функціональні можливості нової підмножини, або ж збільшило вартість рецептурного складу, або ж нова добавка забезпечує зайву функціональну властивість. Така вершина буде вважатися недопустимою для подальшого розвитку. В іншому випадку нова вершина — допустима. Для допустимої вершини критерій  $Q(T+1, n)$  буде обраховуватися за наступним рекурсивним співвідношенням:

$$Q(T+1, n) = Q(T, j) + Mhd(n, K+1). \quad (35)$$

Якщо

$$FVh(T+1, n) = FV, \quad (36)$$

то така точка залишається на вертикалі  $T+1$  як допустима і далі переходить на наступні рівні в такому ж статусі.

Зіставимо кожній дузі переходу від точки  $\langle T, j \rangle$  до точки  $\langle T+1, n \rangle$  величину  $Mhd(n, K+1)$ , яку будемо інтерпретувати як довжину дуги. В такому випадку рішення задачі зводиться до знаходження найкоротшого шляху на ГДС від вершини  $\langle 0, 0 \rangle$  до вершини  $\langle |Mhd|, 1 \rangle$ .

Для зменшення кількості вершин ГДС на кожному кроці рішення здійснюємо наступні дії. Нехай  $Phd(T+1)$  — множина всіх допустимих точок, отриманих на кроці  $T+1$ . Розглянемо дві довільні точки на вертикалі  $T+1$ :  $phd(T+1, i)$  та  $phd(T+1, j)$ , відповідні їм вектори  $FVh(T+1, i)$  і  $FVh(T+1, j)$ , та критерії  $Q(T+1, i)$  і  $Q(T+1, j)$ .

Точка  $Phd(T+1, i)$  є неперспективною щодо до точки  $Phd(T+1, j)$ , якщо виконується співвідношення:

$$\forall m(Phd(T+1, j, m)) \geq \\ \geq Phd(T+1, i, m) \wedge Q(T+1, i), \quad (37)$$

де  $m$  — точка стану на вертикалі площини  $\langle S, T \rangle$ .

Описане співвідношення (37) полягає в тому, що на множині  $Phd(T + 1, j)$  більше функціональних можливостей, порівняно з множиною  $Phd(T + 1, i)$ , при меншій сумарній вартості добавок. Всі неперспективні вершини на кожному кроці побудови рішення відкидаються.

Розроблені математичні моделі, що призначені для оптимізації рецептур морозива, дозволяють уникати виникнення недоліків окремих показників якості цього продукту на окремих стадіях технологічного процесу виробництва.

Розроблений математичний апарат можна застосувати для оптимізації рецептурного складу будь-якого іншого багатокomпонентного харчового продукту з урахуванням діапазонів вмісту базових компонентів та рекомендацій щодо застосування функціонально-технологічних харчових добавок.

Перспективи подальших досліджень полягають у практичній апробації створеного математичного апарату в складі експертної системи, що забезпечить удосконалення рецептурного складу нових видів морозива за рахунок застосування принципово нових функціонально-технологічних інгредієнтів з метою підвищення комплексного показника якості — харчової цінності продукту. Використання ек-

спертної системи дозволить у виробничих умовах з мінімальними витратами часу розраховувати оптимальні за складом рецептури морозива гарантованої якості з урахуванням технологічних інновацій. Експертна система у разі виявлення технологічних дефектів в рецептурах (наприклад, низький вміст дисперсної фази) пропонує набір рекомендацій з метою корекції наявних дефектів. Цей набір рекомендацій формується механізмом логічного висновку на основі закладених в бази знань фактів.

Таким чином, розроблено нову систему розрахунків рецептур морозива для зниження витрат часу та матеріальних ресурсів на проведення досліджень для перевірки відповідності органолептичних та фізико-хімічних показників нормативним вимогам до якості готового продукту.

Розроблено математичний апарат для отримання оптимальних рецептур морозива за заданою якістю та собівартістю як складової експертної системи. На відміну від традиційних методів моделювання рецептур, математичний апарат базується на застосуванні технології обробки експертних даних та методів оптимізації.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Липатов Н.Н., Рогов И.А. Методология проектирования продуктов питания с требуемым комплексом показателей пищевой ценности. *Известия вузов. Пищевая технология*. 1987. № 2. С. 9—15.
2. Ивашкин Ю.А. Информационные технологии проектирования и оценки качества пищевых продуктов направленного действия. *Мясная индустрия*. 2000. № 5. С. 40—41.
3. Оленев Ю.А., Творогова А.А., Казакова Н.В., Соловьева Л.Н. *Справочник по производству мороженого*. Москва: ДеЛи принт, 2004. 798 с.
4. Goff H.D., Hartel W.R. *Ice Cream*. Springer US, New York, 2012. 154 p.
5. Поліщук Г.Є., Бреус Н.М., Вовкодав Н.І., Раманаускас Р. Математическое моделирование активации функционально-технологических свойств яблочного пюре. *Maisto chemija ir technologija. Mokslo darbai (Food chemistry and technology. Proceedings)*. 2013. № 47. С. 45—52.
6. Polischuk G.E., Ivanov S.V., Breus N.M. Features of ice-cream foam structure formation. *Food science and technology*. 2014. V. 2, no. 27. С. 57—62.
7. Бреус Н.М., Маноха Л.Ю., Поліщук Г.Є. Обґрунтування доцільності створення гібридної експертної системи контролю якості заморожених продуктів десертного призначення. *Наукові праці Національного університету харчових технологій*. 2015. № 6. С. 109—116.
8. Маноха Л.Ю., Поліщук Г.Є., Бреус Н.М., Басс О.О. Оптимізація складу морозива на молочній основі з цукристими речовинами. *Наукові праці Національного університету харчових технологій*. 2016. № 1. С. 166—172.
9. Устименко І.М., Бреус Н.М., Поліщук Г.Є. Наукове обґрунтування складу емульсій, призначених для нормалізації молоковмісних продуктів. *Наукові праці Національного університету харчових технологій*. 2016. № 5. С. 183—189.



10. Breus Natalia, Hrybkov Serhii, Polischuk Galyna. Hybrid expert system to model the ice cream recipes. *Ukrainian Journal of Food Science*. 2017. V. 5, is. 2. P. 294–305.
11. Краснов А.Е., Красуля О.Н., Воробьева А.В., Сапрыкина И.Д. *Информационное описание технологических процессов*. Учебно-практическое пособие для студентов технологических, управленческих и инженерных специальностей. Москва: МГУТУ, 2007.
12. Портал искусственного интеллекта. Экспертные системы. URL: <http://www.aiportal.ru/articles/expert-systems/expert-systems.html> (дата звернення: 19.10.2018).
13. Токарев А.В., Красуля О.Н. Оптимизация управляющих воздействий в рецептурах колбасных изделий при наличии технологических дефектов. *Вестник ВГУИТ*. 2015. № 4. С. 66–71.
14. Sablani Shyam S., Rahman M. Shafiur, Datta Ashim K., Mujumdar Arun S. Handbook of Food and Bioprocess Modeling Techniques. CRC Press Taylor & Francis Group, 2007. 613 p.
15. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 5. С. 71–83.
16. Blum C., Puchinger J., Raid G.R., Roli A. Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey. *Applied Soft Computing*. 2011. V. 11, no. 6. P. 4135–4151.
17. Hulianytskyi L.F., Sirenko S.I. Cooperative model-based metaheuristics. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2010. No. 36. P. 33–40.
18. Raidl G.R. A unified view on hybrid metaheuristics. *Lect. Notes Computer Sci*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. P. 1–12.
19. MacGregor Robert. Using a description classifier to enhance knowledge representation. *IEEE Expert*. 2013. V. 6, no. 3. P. 41–46.
20. Cornelius T. Leondes. Expert Systems: The Technology of Knowledge Management and Decision Making for the 21<sup>st</sup> Century. Academic Press, 2009. 1947 p.
21. Wong Bo K., Monaco John A. Expert system applications in business: a review and analysis of the literature. *Information and Management*. 2013. No. 3. P. 141–152.

#### REFERENCES

1. Lipatov, N. N., Rogov, I. A. (1987). Metodologiya proyektirovaniya produktov pitaniya s trebuyemym kompleksom pokazateley pishchevoy tsennosti. *Izvestiya vuzov. Pishchevaya tekhnologiya*, 2, 9–15 [in Ukrainian].
2. Ivashkin, Yu. A. (2000). Informatsionnyye tekhnologii proyektirovaniya i otsenki kachestva pishchevykh produktov napravlennoho deystviya. *Myasnaya industriya*, 5, 40–41 [in Ukrainian].
3. Olenev, Yu. A., Tvorogova, A. A., Kazakova, N. V., Solov'yeva, L. N. (2004). *Spravochnik po proizvodstvu morozhenogo*. Moskva: DeLi print.
4. Goff, H. D., Hartel, W. R. (2012). *Ice Cream*. Springer US, New York.
5. Polischuk, G. E., Breus, N. M., Vovkodav, N. I., Ramanauskas, R. (2013). Matematicheskoye modelirovaniye aktivatsii funktsional'no-tekhnologicheskikh svoystv yablochnogo pyure. *Maisto chemija ir tehnologija. Mokslo darbai (Food chemistry and technology. Proceedings)*, 47, 45–52 [in Latvia].
6. Polischuk, G. E., Ivanov, S. V., Breus, N. M. (2014). Features of ice-cream foam structure formation. *Food science and technology*, 2(27), 57–62 [in Ukrainian].
7. Breus, N. M., Manoha, L. U., Polischuk, G. E. (2015). Obgruntuvannya dotsil'nosti stvorenniya hibrydnoyi ekspertnoyi systemy kontrolyu yakosti zamorozhenykh produktiv desertnoho pryznachennya. *Naukovi pratsi Natsional noho universytetu kharchovykh tekhnolohiy*, 6, 109–116 [in Ukrainian].
8. Manoha, L. U., Polischuk, G. E., Breus, N. M., Bass, O. O. (2016). Optyimizatsiya skladu morozyva na molochniy osnovi z tsukrystymy rehovynamy. *Naukovi pratsi Natsional'noho universytetu kharchovykh tekhnolohiy*, 1, 166–172 [in Ukrainian].
9. Ustymenko, I. M., Breus, N. M., Polischuk, G. E. (2016). Naukove obgruntuvannya skladu emul'siy, pryznachenykh dlya normalizatsiyi molokovmisnykh produktiv. *Naukovi pratsi Natsional'noho universytetu kharchovykh tekhnolohiy*, 5, 183–189 [in Ukrainian].
10. Breus, N. M., Hrybkov, S. V., Polischuk, G. E. (2017). Hybrid expert system to model the ice cream recipes. *Ukrainian Journal of Food Science*, 5(2), 294–305 [in Ukrainian].
11. Krasnov, A. Ye., Krasulya, O. N., Vorob'yova, A. V., Saprykina, I. D. (2007). *Informatsionnoye opisaniye tekhnologicheskikh protsessov*. Uchebnoprakticheskoye posobiye dlya studentov tekhnologicheskikh, upravlencheskikh i inzhenernykh spetsial'nostey. Moskva: MGUTU.

12. Portal iskusstvennogo intellekta. Ekspertnyye sistemy. URL: <http://www.aiportal.ru/articles/expert-systems/expert-systems.html> (Last accessed: 19.10.2018).
13. Tokarev, A. V., Krasulia, O. N. (2015). Optimizatsiya upravlyayushchikh vozdeystviy v retsepturakh kolbasnykh izdeliy pri nalichii tekhnologicheskikh defektov. *Vestnik VGUIT*, 4, 66–71 [in Russia].
14. Sablani, S. S., Rahman, M. Shafiur, Datta, A. K., Mujumdar, A. S. (2007). *Handbook of Food and Bioprocess Modeling Techniques*. CRC Press Taylor & Francis Group.
15. Sergiyenko, I. V., Gulyanitskiy, L. F., Sirenko, S. I. (2009). Klassifikatsiya prikladnykh metodov kombinatornoj optimizatsii. *Kibernetika i sistemnyy analiz*, 5, 71–83.
16. Blum, C., Puchinger, J., Raid, G. R., Roli, A. (2011). Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey. *Applied Soft Computing*, 11(6), 4135–4151.
17. Hulianytskyi, L. F., Sirenko, S. I. (2010). Cooperative model-based metaheuristics. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36, 33–40 [in Ukrainian].
18. Raidl, G. R. (2006). A unified view on hybrid metaheuristics. *Lect. Notes Computer Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 1–12.
19. MacGregor, R. (2013). Using a description classifier to enhance knowledge representation. *IEEE Expert*, 6(3), 41–46.
20. Cornelius, T. L. (2009). *Expert Systems: The Technology of Knowledge Management and Decision Making for the 21<sup>st</sup> Century*. Academic Press.
21. Wong, B. K., Monaco, J. A. (2013). Expert system applications in business: a review and analysis of the literature. *Information and Management*, 3, 141–152.

Стаття надійшла до редакції / Received 06.11.18

Статтю прорецензовано / Revised 27.02.19

Статтю підписано до друку / Accepted 18.03.19

Breus, N., Hrybkov, S., Polischuk, G., and Seidykh, O.

National University of Food Technologies,  
68, Volodymyrska St., Kyiv, 01601, Ukraine,  
+380 44 287 9247, +380 66 294 1304, sergio\_nuft@nuft.edu.ua

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL APPARATUS  
OF THE EXPERT SYSTEM FOR MODELLING ICE CREAM RECIPES  
WITH SPECIFIED QUALITY PARAMETERS

**Introduction.** Application of new methods, in particular, expert systems with mathematical apparatus, enables improving the recipe composition of multi-component food products in a wide range of content of components with their full or partial replacement by alternative ones, including natural functional and technological ingredients.

**Problem Statement.** The creation and use of hybrid expert system of ice cream recipe modelling is impossible without using special mathematical apparatus.

**Purpose.** To develop mathematical models and methods that enable to calculate the multicomponent ice cream recipes with the standard chemical composition taking into account the raw materials and functional and technological ingredients available at the manufacturer and to get the finished products of guaranteed quality.

**Materials and Methods.** The methods of analysis and synthesis, generalization and scientific abstraction, as well as the method of mathematical modelling are used. The information base of the research is the results of laboratory studies of the quality of recipe components and ice creams of different chemical composition. Mathematical modelling with the use of tuples, systems of equations and restrictions, is made in *MathCad* and *MathLab* software packages.

**Results.** As a result of the development of the expert system mathematical apparatus, a set-theoretical mathematical model of the finished product quality control at the stage of operative planning of new types of ice cream with increased nutritional value has been obtained; multi-component ice cream recipes have been optimized in terms of composition; and a model for determining the optimal set of control actions in the presence of technological defects in the calculation of recipes has been built.

**Conclusions.** The created mathematical apparatus for modeling ice cream recipes has a large-scale application due to interchangeability of separate functional and technological components, which has been tested and confirmed during the trials in research laboratories.

*Keywords:* mathematical apparatus, expert system, optimization, and ice cream recipe modelling.

*Н.Н. Бреус, С.В. Грибков, Г.Е. Полищук, О.Л. Седих*  
Национальный университет пищевых технологий,  
ул. Владимирская, 68, Киев, 01601, Украина,  
+380 44 287 9247, +380 66 294 1304, sergio\_nuft@nuft.edu.ua

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЦЕПТУР МОРОЖЕНОГО  
ИЗ ЗАДАННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА

**Введение.** Применение новых методов, в частности экспертных систем с математическим аппаратом, позволяет совершенствовать рецептурный состав многокомпонентных пищевых продуктов в широком диапазоне содержания составляющих компонентов с их полной или частичной заменой на другие, в том числе и на натуральные функционально-технологические ингредиенты.

**Проблематика.** Создание и использование гибридной экспертной системы моделирования рецептур мороженого невозможно осуществить без использования особого математического аппарата.

**Цель.** Разработка математических моделей и методов, которые позволяют оперативно рассчитывать многокомпонентные рецептуры мороженого с нормативным химическим составом с учетом имеющихся на предприятии сырья и функционально-технологических ингредиентов и получать готовый продукт гарантированного качества.

**Материалы и методы.** Использован метод анализа и синтеза, обобщения и научной абстракции, а также метод математического моделирования. Информационной базой исследования послужили результаты лабораторных исследований качества рецептурных компонентов и мороженого разного химического состава. Математическое моделирование с использованием кортежей, систем уравнений и ограничений подробно осуществлено в программных пакетах *MathCad* и *MathLab*.

**Результаты.** В ходе разработки математического аппарата экспертной системы была получена теоретико-множественная математическая модель управления качеством готового продукта на этапе оперативного планирования рецептуры новых видов мороженого повышенной пищевой ценности, оптимизировано по составу многокомпонентные рецептуры мороженого, сформирована модель определения оптимального набора управляющих воздействий при наличии технологических дефектов при расчете рецептур.

**Выводы.** Созданный математический аппарат для моделирования рецептур мороженого является универсальным благодаря взаимозаменяемости отдельных функционально-технологических компонентов, что проверено и подтверждено во время его апробации в научно-исследовательских лабораториях.

**Ключевые слова:** математический аппарат, экспертная система, оптимизация, моделирование рецептур мороженого.